Exercice 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$.

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Affirmation 1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$ donc $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-2x} + x \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Affirmation 1 vraie

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}$.

$f'(x) + 2f(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2x\,\mathrm{e}^{-2x} = -2x\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2x\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$

Affirmation 2 vraie

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\,1]$.

$f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$ donc $f''(x) = (-2) \times \mathrm{e}^{-2x} + (-2x+1) \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = (4x-4)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

On étudie le signe de $f''(x)$ sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$4x-4$		$-$	0	$+$	
e^{-2x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

Affirmation 3 fausse

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}$.

On détermine le signe de $f'(x) = (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
e^{-2x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Valeurs remarquables

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1} > 0$
- $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{2x}}$; par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{2x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On établit le tableau des variations de f sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1} > 0$. Or $-1 \in \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1}\right]$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, la fonction f est strictement positive donc l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

Donc l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}$.

Affirmation 4 vraie

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3\,\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

L'aire du domaine est égale à $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

On utilise une intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$

$$\mathscr{A} = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[x \times \left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\,\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1$$
$$= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2} - 0\right] - \left[\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{0}}{4}\right] = \frac{1}{4} - \frac{3\,\mathrm{e}^{-2}}{4}$$

Affirmation 5 vraie